ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGẠC NGỌC KHÔI

DƯỚI THÁC TRIỂN CỰC ĐẠI CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HOÀ DƯỚI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGẠC NGỌC KHÔI

DƯỚI THÁC TRIỂN CỰC ĐẠI CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HOÀ DƯỚI

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Ngạc Ngọc Khôi

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Ban giám đốc TTGDTX Tỉnh Hà Giang cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2016

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền giả lồi. Ký hiệu $\mathcal{E}_0(\Omega)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới âm φ trên Ω với giá trị biên 0 và độ đo Monge-Ampere hữu hạn trên Ω. $\mathcal{F}(\Omega)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới âm φ trên Ω sao cho tồn tại dãy giảm φ_j các hàm đa điều hoà dưới trong $\mathcal{E}_0(\Omega)$ hội tụ đến φ thỏa mãn $\sup_j \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n < +\infty$. Nếu Ω và $\tilde{\Omega}$ là các miền siêu lồi với $\Omega \subset \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ và $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì có thể chỉ ra rằng tồn tại một hàm đa điều hòa dưới $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}(\tilde{\Omega})$ sao cho $\tilde{\varphi} \le \varphi$ trên Ω và $\int_{\tilde{\Omega}} (dd^c\tilde{\varphi})^n \le \int_\Omega (dd^c\varphi)^n$. Hàm như thế được gọi là dưới thác triển của φ tới $\tilde{\Omega}$.

El Mir, năm 1980, đã cho một ví dụ về một hàm đa điều hòa dưới trên song đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}^2$ mà hạn chế lên một song đĩa bé hơn không có dưới thác triển lên toàn bộ không gian. Đồng thời chỉ ra rằng, sau khi làm yếu đi tính kỳ dị của hàm đa điều hòa dưới đã cho bằng sự hợp thành với hàm lồi tăng thích hợp, có thể đạt được dưới thác triển toàn cục. Kết quả này được tổng quát bởi Alexander và Taylor, năm 1984.

U. Cegrell và A. Zeriahi, năm 2003 đã chứng minh rằng hàm đa điều hòa dưới với độ đo Monge – Ampere bị chặn đều trên một miền siêu lồi bị chặn luôn có dưới thác triển đa điều hòa dưới đến một miền siêu lồi lớn hơn. U. Cegrell, S. Kolodziej và A. Zeriahi, năm 2005 đã chỉ ra rằng hàm đa điều hòa dưới với độ đo Monge – Ampere trên một miền siêu lồi bị chặn luôn có dưới thác triển đa điều hòa dưới toàn cục với cấp tăng lôga ở vô cùng.

Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi chọn đề tài "*Dưới thác triển cực đại của hàm đa điều hoà dưới*". Đề tài có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận văn là trình bày các kết quả gần đây của U. Cegrell, S. Kolodziej và A. Zeriahi về dưới thác triển cực đại của hàm đa điều hoà dưới.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả của lý thuyết đa thế vị.

+ Nghiên cứu độ đo Monge - Ampère của dưới thác triển cực đại, thế vị trên miền Kahler và dưới thác triển của các hàm tựa đa điều hòa dưới.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 46 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị, các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, toán tử Monge-Ampère, nguyên lý so sánh Bedford-Taylor, các lớp năng lượng và năng lượng có trọng trong $\mathbb{C}^n$.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả gần đây của U. Cegrell, S. Kolodziej và A. Zeriahi về dưới thác triển cực đại của hàm đa điều hoà dưới. Trong đó đề cập đến bài toán dưới thác triển địa phương và toàn cục của hàm (quasi-) đa điều hoà dưới từ miền con “chính qui” của đa tạp Kahle compact. Chứng minh cận đúng trên khối lượng Monge - Ampère phức của một hàm cho trước kéo theo sự tồn tại của một dưới thác triển tới một miền con chỉnh quy lớn hơn hoặc tới toàn bộ đa tạp compact . Trong một vài trường hợp sẽ chỉ ra rằng dưới thác triển cực đại có một độ đo Monge - Ampère phức hoàn toàn xác định và thu được đánh giá chính xác trên độ đo này. Cuối cùng là một ví dụ của hàm đa điều hòa dưới với độ đo Monge - Ampère phức hoàn toàn xác định và cận phải trên khối lượng Monge - Ampère của nó trên hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^n$ mà dưới thác triển cực đại tới không gian xạ ảnh phức $\mathbb{P}_n$ không có độ đo Monge - Ampère phức hoàn toàn xác định toàn cục.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Dạng vi phân và dòng trong lý thuyết đa thế vị

Giả sử $\mathbb{R}^n$ là không gian vectơ n chiều với cơ sở chính tắc $e_j = (0,...,0,1,0,...,0)$, ở đó 1 ở vị trí thứ j. Giả sử với mỗi $1 \le j \le n$ kí hiệu u_j là hàm tọa độ thứ j: $u_j(x) = x_j$. Một ánh xạ $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{p} \to \mathbb{C}$ gọi là $p-$tuyến tính nếu nó là tuyến tính theo từng biến khi các biến khác cố định. Một ánh xạ $p-$tuyến tính sao cho $f(v_1,...,v_p) = 0$ khi $v_j = v_{j+1}, 1 \le j < n$ gọi là ánh xạ $p-$tuyến tính thay dấu. Tập các ánh xạ $p-$tuyến tính thay dấu từ $\underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{p}$ tới $\mathbb{C}$ kí hiệu $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.

Định nghĩa 1.1.1. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở. Một $p-$dạng vi phân trên Ω là ánh xạ* $\alpha : U \to \bigwedge^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$.

Nếu đặt $dx_k(x) = u_k, 1 \le k \le n, x \in \Omega$ thì ta có thể viết mỗi $p-$dạng vi phân α trên Ω dưới dạng:

$$\alpha(x) = \sum_I {}' \alpha_I(x) dx_I$$

ở đó $I = (i_1,...,i_p), 1 \le i_1 < ... < i_p \le n, dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}, \alpha_I(x)$ là các hàm trên Ω.

Giả sử $\alpha = \sum_I{}' \alpha_I dx_I$ là $p-$dạng và $\beta = \sum_J{}' \beta_J(x) dx_J$ là $q-$dạng, ở đó $1 \le i_1 < ... < i_p \le n$ và $1 \le j_1 < ... < j_q \le n$ khi đó tích ngoài $\alpha \wedge \beta$ là $(p+q)-$dạng cho bởi công thức $\alpha \wedge \beta = \sum_L \gamma_L dx_L$, ở đó $\gamma_L dx_L = 0$ nếu $i_k = j_l$ với $1 \le k \le p, 1 \le l \le q$ và $\gamma_L dx_L = (-1)^\sigma \alpha_I \beta_J dx_{l_1} \wedge ... \wedge dx_{l_{p+q}}$, $1 \le l_1 < ... < l_{p+q} \le n$ với σ là hoán vị của dãy $i_1 < i_2 < ... < i_p$ và $j_1 < j_2 < ... < j_q$ trong tập hợp $1,...,n$ để tạo thành dãy tăng $1 \le l_1 < ... < l_{p+q} \le n$.

Nếu f là một hàm thì $f \wedge \alpha = f\alpha$ và $(f\alpha) \wedge \beta = f(\alpha \wedge \beta)$.

Mọi $p-$dạng α với $p > n$ đều bằng 0. Các dạng có bậc cực đại là các dạng bậc n. Cho α là $p-$dạng lớp C^1. Vi phân ngoài (đạo hàm ngoài) của α là $(p+1)-$dạng cho bởi:

$$d\alpha = \sum_I{}' d\alpha_I \wedge dx_I$$

Nếu $d\alpha = 0$ ta nói α là dạng đóng. Mọi dạng có bậc cực đại là đóng.

Giả sử $\alpha = \varphi dx_1 \wedge ... \wedge dx_n, \varphi \in L^1(\Omega)$. Khi đó

$$\int_\Omega \alpha = \int_\Omega \varphi dx_1 \wedge ... \wedge dx_n = \int_\Omega \varphi dV,$$

dV là độ đo Lebesgue trên Ω.

Định nghĩa 1.1.2. *Một dòng bậc p hay có chiều $(n-p)$ trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là dạng tuyến tính liên tục $T : \mathcal{D}^{(n-p)}(\Omega) \to \mathbb{C}$. Nếu α là dạng trong $\mathcal{D}^{(n-p)}(\Omega)$, giá trị của T tại α, kí hiệu bởi $T(\alpha)$ hay $\langle T, \alpha \rangle$.*